Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ — No. 1 — Date 26/11/2019

(Συνέχεια από χθες:)

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & y=0 \\ 0, & \text{παντού αλλού} \end{cases} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$\boxed{?}_1$ $\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$ κλειστό στον $\mathbb{R}^2$

$\boxed{?}_2$ $\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),\varepsilon) : f(x,y)=0$

(όπου $y_0 \neq 0$ και $\varepsilon>0$ έτσι ώστε

$B((x_0,y_0),\varepsilon) \cap \{(x,0) : x\in\mathbb{R}\} = \emptyset$) $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=0.$

$\boxed{?}_1$ Έστω $(x_\nu,y_\nu) \subset \{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$ με $\overset{(2)}{} (x_\nu,y_\nu) \to \underbrace{(x_0,y_0)}_{\in\mathbb{R}^2}$

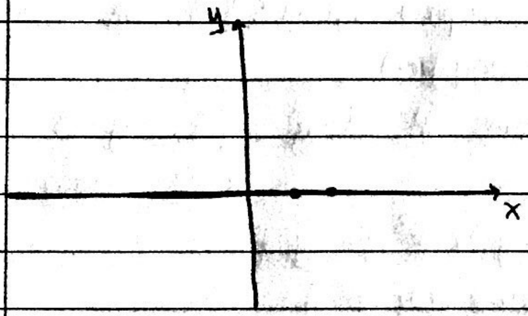
Θ.ν.δ.ο. $(x_0,y_0) \in \{\ldots\}$

$[U\subset\mathbb{R}^n$ κλειστό $\Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n : \bar{x}_0 \in U]$

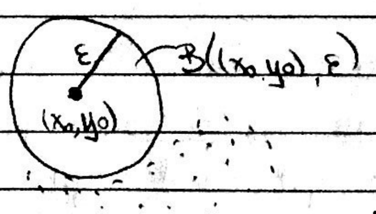
$(1) \Rightarrow y_\nu = 0 \ \forall \nu\in\mathbb{N}$

$(2) \Leftrightarrow x_\nu \to x_0 \wedge \underbrace{y_\nu}_{=0} \to y_0$, $\quad 0 \to 0$

Άρα $(x_0,y_0) = (x_0,0) \in \{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$



$\boxed{?}_2$



$f|_{B((x_0,y_0),\varepsilon)} \equiv 0 \qquad$ Θ.ν.δ.ο.: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$

$\overset{}{\underset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow}} \forall (x_\nu,y_\nu) \to (x_0,y_0) : f(x_\nu,y_\nu) \to 0$

$\underset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists\nu_0\ \forall\nu\geq\nu_0 : (x_\nu,y_\nu) \in B((x_0,y_0),\varepsilon)$

$\Leftrightarrow \|(x_\nu,y_\nu) - (x_0,y_0)\| < \varepsilon.$

http://www.tanenghong.com

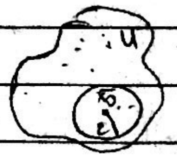
Scanned with CamScanner

Άρα, $\forall \nu \geq \nu_0$ $f(x_\nu, y_\nu) = 0 \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$

Άρα (επανάληψη) δ.ο. $\forall (x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0)$

δηλ. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ $\quad f(x_\nu, y_\nu) \to 0$

Παρατήρηση (SOS!) Εστω οτι θ.ν.δ.ο. η $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, είναι συνεχής σε ένα εσωτερικό σημείο $\bar{x}_0 \in U$. Τότε, αρκεί ν.δ.ο. η $f|_{B(\bar{x}_0, \varepsilon)}$ είναι συνεχής στο $\bar{x}_0$, όπου $\varepsilon > 0$, τέτοιο ώστε $B(\bar{x}_0, \varepsilon) \subset U$.



[Ο λόγος είναι ότι για να δείξουμε τη συνέχεια της f στο $\bar{x}_0$.
θ.ν.δ.ο. : $\forall (\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ ισχύει $f(\bar{x}_\nu) \to f(\bar{x}_0)$

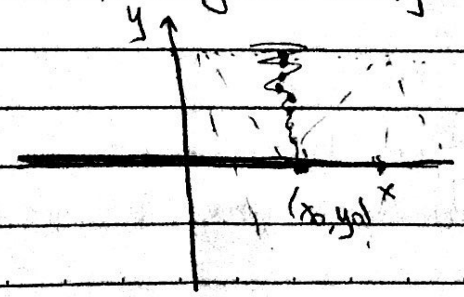
Όμως για κάθε τέτοια ακολουθία $\exists \nu_0 \forall \nu \geq \nu_0$: $\bar{x}_\nu \in B(\bar{x}_0, \varepsilon)$
Άρα αρκεί να δούμε τι κάνει το «τέλος» (η «ουρά») κάθε τέτοιας ακολουθίας, το οποίο (η οποία) βρίσκεται στο $B(\bar{x}_0, \varepsilon)$]

Προσοχή όμως: Αυτό ισχύει μόνο για εσωτερικά σημεία!!! (βλ. παραδείγματα, αφού τελειώσουμε με το παρόν παράδειγμα)

Συνέχεια του παρόντος παραδείγματος: Η $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y = 0 \\ 0, & \text{παντού αλλού} \end{cases}$ $\quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$

είναι συνεχής σε κάθε σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ με $y_0 \neq 0$
[$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \; x \in \mathbb{R}\}$ ανοικτό στον $\mathbb{R}^2$]

Έστω τώρα (το «κακό» κομμάτι της άσκησης) $(x_0, y_0) \in \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$.
Ερώτηση: Είναι η f όπως την ορίσαμε, συνεχής στο (x_0, y_0)?
Δηλαδή, ισχύει για κάθε $(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0)$ ότι $\underbrace{f(x_\nu, y_\nu)}_{=a_\nu} \to [f(x_0, y_0) =] 1$.



Απάντηση: Όχι, δεν ισχύει, αφού
π.χ. για $(x_0, \underbrace{y_0 + \tfrac{1}{\nu}}_{\neq 0}) \to (x_0, \underset{0}{y_0})$ $\quad (y_0 = 0)$

$\overbrace{f(x_0, y_0 + \tfrac{1}{\nu})}^{\neq 0} = 0 \longrightarrow 0 \neq 1 = f(x_0, y_0)$

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner

Άρα είδαμε ότι η $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y=0 \\ 0, & \text{παντού αλλού} \end{cases}$

είναι συνεχής $\forall (x_0,y_0)$ με $y_0 \neq 0$, ενώ δεν είναι συνεχής στα σημεία $(x_0,0)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

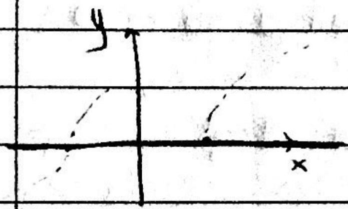
Ερώτηση: Είναι, για το προηγούμενο f, η $\underbrace{f|_{\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}}}_{=:g}$ συνεχής?

Έχουμε $g: \underbrace{\{\overbrace{(x,0)}^{\in\mathbb{R}^2} : x\in\mathbb{R}\}}_{\subset\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$,

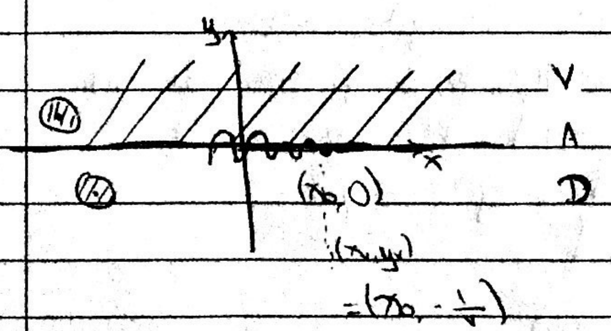
$g(x,y) = f(x,y)$ για $(x,y)\in\{(x,0):x\in\mathbb{R}\} \Rightarrow g(x,y)=1$ (αφού για $(x,y)\in\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$ έχουμε $f(x,y)=1$)

Δηλαδή, έχουμε τη συνάρτηση $g:\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}\to\mathbb{R}$ με $g(x,y)=1$ για κάθε $(x,y)\in\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$

Αυτή είναι συνεχής (δηλ. είναι συνεχής σε κάθε $(x_0,0)\in\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$) αφού $\forall (x_\nu,y_\nu)\in\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$ με $(x_\nu, \underbrace{y_\nu}_{=0}) \to (x_0,0)$: $g(x_\nu,0)=1 \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 1 = g(x_0,0)$



Παράδειγμα (άσκηση): $f(x,y)=\begin{cases}1, & y\geq 0\\ 0, & y<0\end{cases}$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$. Εξετάστε την $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ως προς τη συνέχειά της σε κάθε $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.



$\Rightarrow f(x_\nu,y_\nu)=0 \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0 \neq 1 = f(x_0,0)$

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner

Η f είναι συνεχής $\boxed{1}$ $\forall (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, με $y_0\neq 0$ και μη συνεχής $\boxed{2}$ στα σημεία $(x_0,0)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

$\boxed{2}$: Ισχύει, αφού π.χ. για $(x_\nu,y_\nu)=(x_0,-\frac{1}{\nu})\to(x_0,0)$ έχουμε $\underbrace{f(x_0,-1/\nu)}_{=0 \text{ εξ ορισμού}}\to 0$

$\neq 1 = f(x_0,0)$

$\boxed{1}$: Το σύνολο $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y>0\}$ είναι ανοιχτό, αφού το συμπλήρωμα $\mathbb{R}^2\setminus V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\leq 0\}$ είναι κλειστό $[\underbrace{(x_\nu,y_\nu)}_{\in\mathbb{R}^2\setminus V\Rightarrow y_\nu\leq 0}\to(x_0,y_0)\Leftrightarrow x_\nu\to x_0 \wedge \underbrace{y_\nu}_{\leq 0\Rightarrow\leq 0}\to$

$\to \underbrace{y_0}_{\leq 0}\Rightarrow(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\setminus V]$

Ανάλογα, το $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y<0\}$ είναι ανοικτό, αφού $\mathbb{R}^2\setminus D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\geq 0\}$ είναι κλειστό [ανάλογη απόδειξη]

Έστω ένα $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\setminus\underbrace{\{(x,0), x\in\mathbb{R}\}}_{=A}$. Τότε $(x_0,y_0)\in V\cup D$.

Έστω, χβτγ, ότι $(x_0,y_0)\in V \xRightarrow{V \text{ ανοιχτό}} \exists\varepsilon>0: B((x_0,y_0),\varepsilon)\subset V \Rightarrow \forall (x,y)\in B((x_0,y_0),\varepsilon)$ $: f(x,y)=0 \Rightarrow \forall \underline{(x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0)}: \exists\nu_0\ \forall\nu\geq\nu_0\ (x_\nu,y_\nu)\in B((x_0,y_0),\varepsilon)$ $\Rightarrow f(x_\nu,y_\nu)=1 \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 1 = f(x_0,y_0)$. [Ανάλογα για το D] □

Άσκηση 30: (Επιμ. Δ.Α.) Έστω η $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(x,y)=\begin{cases}0, & y\leq 0 \vee y\geq x^2\\ 1, & 0<y<x^2\end{cases}$

(α) ΔΟ κατά μήκος κάθε ευθείας που περνάει από την αρχή των αξόνων η f έχει στο $(0,0)$ το όριο 0.
δηλ. Δ.ν.δ.ο. η $f|_{\{(x,ax):x\in\mathbb{R}\}}$ $(a\in\mathbb{R})$ και η $f|_{\{(0,y):y\in\mathbb{R}\}}$ έχουν όριο στο $(0,0)$ το 0

δηλ. Δ.ν.δ.ο. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_{A_a}(x,y)=0 \Leftrightarrow \forall (x_\nu,y_\nu)\in A_a\setminus\{0,0\}$ με $(x_\nu,y_\nu)\to(0,0)$:

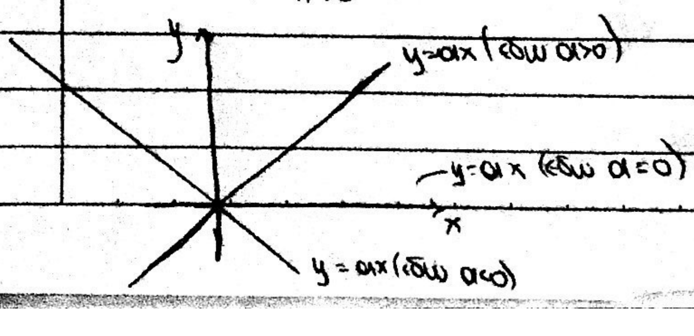
$f(x_\nu,y_\nu)\to 0$

$\Leftrightarrow \forall (x_\nu,y_\nu)$ με $y_\nu=ax_\nu$ και $x_\nu\neq 0$ με $x_\nu\to 0$

$(\Rightarrow y_\nu\to 0)]: f(x_\nu,ax_\nu)\to 0$

$\Leftrightarrow \forall x_\nu\neq 0$ με $x_\nu\to 0$: $f(x_\nu,ay_\nu)\to 0$

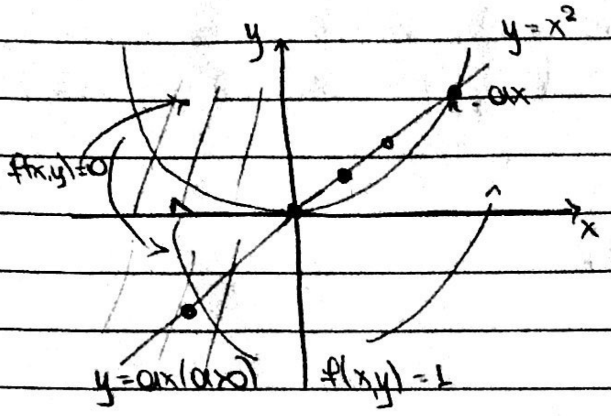
[$\Leftrightarrow$ Δ.ν.δ.ο.: $\lim_{x\to 0} f(x,ax)=0$]



http://www.tanenghong.com
Scanned with CamScanner

Παρατήρηση: Άρα «κατά μήκος κάθε ευθείας» σημαίνει να περιοριστούμε στην ευθεία αυτή.

Πώς «παίζει» η f?



Ισχυρισμός: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $f(x,\alpha x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

- [$\alpha=0$: $f(x,0)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$
- $\alpha>0$: $f(x,\alpha x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, επειδή για $x\le 0 \Rightarrow \underbrace{\alpha x}_{=y}\le 0 \Rightarrow f(x,\alpha x)=0$ και για $x>0$
  ισχύει $y=\alpha x\ge x^2 \Leftrightarrow \alpha\ge x$ δηλαδή $f(x,\alpha x)=0$, $\forall x\le\alpha$.
- $\alpha<0$: αντίστοιχα (άσκηση)]

$\Rightarrow$ ο ισχυρισμός όπως πάνω είναι λάθος. Όμως ισχύει ότι $\forall x\in\mathbb{R}$ με $x\le\alpha$ (για $\alpha>0$): $f(x,\alpha x)=0$.

Ας επικεντρωθούμε σε $\alpha>0$ [οι άλλες περιπτώσεις: άσκηση]

Έχουμε ότι $f(x,\alpha x)=0$, $\forall x\le\alpha \Rightarrow \underbrace{\lim_{x\to 0} f(x,\alpha x)=0}$

$\Leftrightarrow \forall (x_\nu)\subset\mathbb{R}$ με $x_\nu\neq 0$ και $x_\nu\to 0$

$\exists \nu_0\ \forall \nu\ge\nu_0$: $x_\nu\le\alpha$

$\Rightarrow \forall\nu\ge\nu_0$: $f(x_\nu,\alpha x_\nu)=0 \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$

Αυτό ισχύει αντίστοιχα και για τις $f|_{A_\alpha}$ με $\alpha\le 0$

[για $\alpha=0$: $f(x,0x)=f(x,0)=0$,

$\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,0)=0$]

και για την $f|_{A_\infty}$ δηλ. $\lim_{y\to 0} f(0,y)=0$, $\forall y\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{y\to 0} f(0,y)=0$

Άρα, τελικά σε κάθε ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων, η f έχει στο $(0,0)$ το όριο 0.

• Περιορισμένη σε οποιαδήποτε ευθεία που περνάει από το $(0,0)$ η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Γενικά, (δηλ. όχι περιορισμένη κάπου) είναι η f συνεχής στο $(0,0)$;

Όχι, π.χ. για την $\left(\underset{x}{\frac{1}{\nu}}, \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu^2}\right)}_{y = 1/2\, x^2}\right) \longrightarrow (0,0)$, έχουμε

$$f\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right) = 1 \quad \forall \nu$$

$$\downarrow \nu \to \infty$$

$$f(0,0) = 0 \neq 1$$

Scanned with CamScanner